要听他连续说多少次“我爱你”才能相信

——怎样判断一枚硬币是不是公平的？

抛硬币是生活中最常被拿来举例子的 Bernoulli（贝努力）试验。这也是一个最简单的概率事件，只有两个选项，正面或者反面（假设不存在立着的情况）。这个例子也可以推广到很多二分变量（binary variables）的取值概率问题。支持或者反对，使用或者不用等等。

一枚硬币如果是公平的话，每次抛硬币得到正反面的机会各等于二分之一。现在我们假定说抛硬币得到正面的概率是 p，得到反面的概率是 q=(1-p)。

现在我们有一枚硬币，抛了 100 次，得到了 55 次正面。那么，我们知道，在这 100 次里面，我们得到正面的概率是 55/100=.55。但我们都抛了 100 次了，知道了 p=.55，又怎么样呢？我们想知道的是，下次以及每次抛这个硬币，得到正面的概率 p 的估计值 p-hat（ $\hat{p}$ ）是多少。

这么想的话，上面所说的 p=.55 是指我们抛了的 100 次我们知道的抛硬币得到正面的概率是.55，也就是我们的样本（sample）里的 p=.55。我们想知道的是通过我们的样本推测到总体（population）的抛这枚硬币得正面的估计值 p-hat（ $\hat{p}$ ）是多少呢？

从样本统计量 p 推算总体估计值 p-hat（ $\hat{p}$ ）就要考虑置信区间（Confidence Interval）。下面这枚公式就能推算，从我们这个抛了 100 次的样本，估计抛这枚硬币得正面的概率是：

$$\left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \qquad \text{（公式一）}$$

这里的n就是我们抛的次数，也就是样本量（sample size）。这里的 $Z_{\alpha/2}$ 是一个统计量，根据不同的置信度(Confidence Level, 如 90%，95%，99%等)有不同的固定的取值。这个 $Z_{\alpha/2}$ 是另外一个故事了。有兴趣的同学可以去维基百科看“Confidence Interval（置信区间）”这个词条http://en.wikipedia.org/wiki/Confidence_interval。当然了，这个取值还隐藏了另外一个关于正态分布的假设，那也是另一个故事了。

如果我们采用 95%的置信度，对应的 $Z_{\alpha/2}$ 就等于 1.96。我们这 100 次硬币来估算这枚硬币被抛得正面的概率就是一个区间（.452, .648）。也就是说，如果我们再抛 100 次硬币，我们有 95%的机会得到正面的次数在 45 次到 65 次之间。

好吧好吧。我承认我有些罗嗦了。上面这些其实不是我想说的重点。我想说的重点是，我们要连续抛多少次正面，在 95%的置信度上，才有根据不否定硬币是不公平的（有点绕，嘿嘿）？

下面就是一个假设检验的问题了。假设检验的一般就得提出一个零假设（Null Hypothesis，H_0）和一个备择假设（Alternative Hypothesis，H_1）。

我们这里的零假设就是硬币是公平的，也就是每次抛硬币得到正面的概率是 1/2。

H_0：p-hat=.5

我们这里的备择假设就是硬币是不公平的，也就是每次抛硬币得到正面的概率不是 1/2。

H_1：p-hat<>.5

我们说的每次抛多少次正面才够的意思是，我们已经确定了p_1=1，我们想知道的是n的最小值。我们的问题可以等价地转换成我们估算的p-hat_1和假定硬币公平的p-hat_2之间的差，怎么就等于 0。

这里，H_0可以等价地转换为p-hat_1-p-hat_2=0。

H_1可以等价地转换为p-hat_1-p-hat_2<>0。

怎么算两个比例之差p_1-p_2的区间估计呢？我们要用到下面这个公式：

$$(p_1 - p_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \qquad \text{（公式二）}$$

这里，我们的p_1=1，p_2=.5 是知道的，在 95%的置信度条件下 $Z_{\alpha/2}$ =1.96，代入公式二，就可以得到区间是：

$$\frac{1}{2} \pm \frac{0.98}{\sqrt{n_1}} = 0$$

我们的零假设也就转换成：

0 必须落在$\frac{1}{2} \pm \frac{0.98}{\sqrt{n_1}}$这个区间内。也就是：

$$\frac{1}{2} - \frac{0.98}{\sqrt{n_1}} \le 0 \le \frac{1}{2} + \frac{0.98}{\sqrt{n_1}}$$

通过计算，也就说是 n<=3.92 的时候，零假设才可能成立。只要 n>3.92 的时候，我们就可以拒绝零假设，然后在置信度 95%的条件下，认为这枚倒霉的硬币是不公平的。

哈哈哈哈。

最后，再让我来说一下 so what 的问题。如果我们假定你的男人跟你说“我爱你”和说“我不爱你”是等概率事件，机会各一半一半。那么，如果你的男人连续四次跟你说“我爱你”。你选择相信他这句话。你应该有 95%的把握。哈哈。可是，你会觉得你男人说“我爱你”和说“我不爱你”不是等概率事件。好吧。那你觉得概率多大你才满意？p=.999999999? 好吧，你还说，置信度 95%不够，要 99%才差不多。我告诉你，在 99%的置信度条件下 $Z_{\alpha/2}$ =2.56。这样的话，你能算出，你男人要连续说多少次“我爱你”，你才能相信他（说“我爱你”不是偶然的）了吧？？？